

# Agentų modeliavimas

Aleksejus Kononovičius

Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, Vilniaus universitetas

✉ [aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt](mailto:aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt)

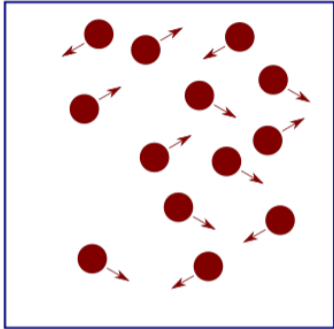
🔗 [kononovicius.lt](http://kononovicius.lt), [rf.mokslasplius.lt](http://rf.mokslasplius.lt)



**Faculty of  
Physics**



# Kompleksinių fizinių ir socialinių sistemų grupė



**Vystomos sritys:** netiesinė dinamika ir sinchronizacija, ilga atmintis, sociofizika ir ekonofizika.

Physics of Risk About Topics Students Contribute

Search using Google

## Riddler's football playoff

February 21, 2023

Antonio Kabanovskas [#RecursiveMedia](#) [#Riscular](#) [#Papers](#) [#RiveDanglė](#)

This week we will take a look at another Riddler's Classic puzzle. The problem for December 9th, 2022 invites us to take a look at a particular stochastic football tournament.

### The problem

Four teams participate in knock-out tournament. Two pairs play their semi-final games, while the winners advance and play the final game to determine the overall winner.

Each team is described by a random variable  $x_i$  (equally distributed in  $[0, 1]$  interval), which stands for its strength. Semi-finals are seeded appropriately - the strongest team (one with highest  $x_i$ ) is paired with the weakest one (one with lowest  $x_i$ ), while the other two form the second pair.

The outcome of each match is random. The probability that team  $i$  will beat team  $j$  is given by

$$p(w_{ij} = i) = \frac{x_i}{x_i + x_j}. \quad (1)$$

Question: What is the average quality of the champion?

### Analytical solution

Let us first consider a simpler problem. Lets assume that we have just two competing teams and, therefore, a single match to play. In this case it is just but a simple arithmetic exercise, as if team  $i$  wins, then the winner is of strength  $x_i$ , otherwise team  $j$  wins and the winner's strength is  $x_j$ . The average is given by:

$$\bar{x}_i(x_i, x_j) = x_i p(w_{ij} = i) + x_j p(w_{ij} = j) = \frac{x_i^2}{x_i + x_j} + \frac{x_j^2}{x_i + x_j}. \quad (2)$$

The above average is over a match between two particular teams (to denote this we use bar above the  $x$ ). To get the answer we are looking for we need to average over all possible team pairs:

$$\langle x_i \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \bar{x}_i(x_i, x_j) dx_i dx_j = \frac{4 \ln(2) - 1}{3} \approx 0.591 \dots \quad (3)$$

### Four team case

Dealing with the four team case follows similar logic, but there is a complicating that teams are ranked. So, let us assume that  $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ . There are four possible champions and we need to calculate the probabilities of each outcome.

First let us consider the outcome when team  $i$  is the champion. For this to happen  $i$  needs to beat team  $l$  in the



Physics of risk, complexity and socio-economic systems.

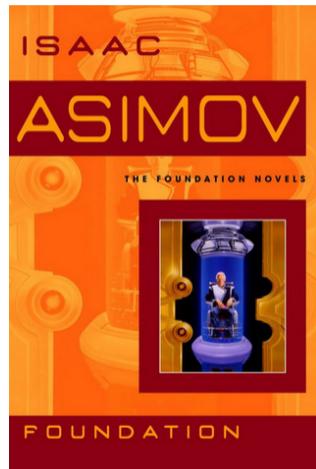
- Subscribe via RSS feed
- Follow on Facebook
- Content @ GitHub
- Models @ GitHub
- Theme @ GitHub

Vilnius University  
Faculty of Physics  
Institute of Theoretical Physics and Astronomy  
COST P10 meeting in Vilnius (2008)  
DPG Physics of Socio-Economic Systems Division  
European Centre for Living Technology  
PPS Physics in Economy and Social Sciences

Recursive ... Podes  
Rigid band ... Resonance  
Risque dyn ... Riscular info ...

# Planas

- 1 Įvadas į agentų modeliavimą
- 2 Protingi agentai ir lošimų teorija
- 3 Turtas ir idealios dujos
- 4 Tinklų teorija
- 5 Nuomonių dinamika



Paveikslas: [goodreads.com](http://goodreads.com)



Įvadas į agentų modeliavimą

# Kas tai?

**Modeliavimas** yra realybės apibendrinimas.

## Agentai:

- atitinka modeliuojamas esybes,
- turi būdingas savybes,
- gali siekti tikslų,
- sąveikauja su aplinka,
- sąveikauja su kitais.



“Visi modeliai yra klaidingi, bet dalis jų yra naudingi” (George Box)

# Kam to reikia?

- **Agentai:** keleiviai

- **Aplinka:** lėktuvas (praėjimas, kėdės, lentynos)

## Configuration

Choose an airplane model

airplane model

A318 (22 rows - 132 seats)

OR

Configure your own aircraft

Number of seat rows

22

Configurations taken from: <https://www.scribd.com/doc/30183905/All-About-Airbus-A-320-Family>

Passenger number

132

Passenger with Luggage per cent

0

Storage luggage takes time

Boarding method

B51-Random with assigned seats

setup

go once

go

## Output

airplane-configuration

A318 (22 rows - 132 seats)

passenger-with-luggage-number

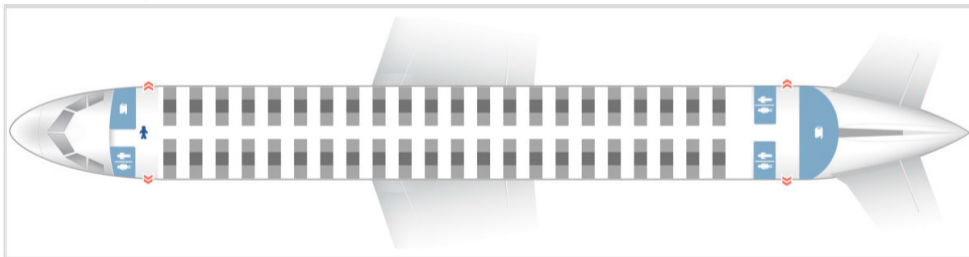
0

passenger-without-luggage-number

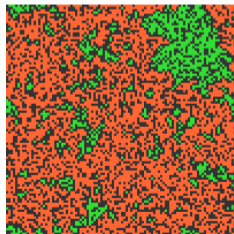
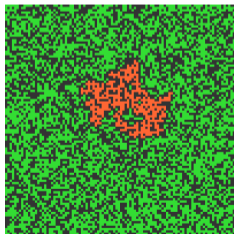
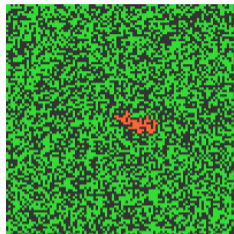
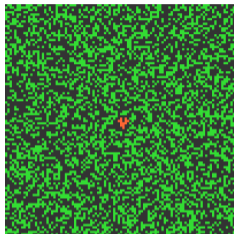
132

counter

0



# Kas įdomaus iš fizikos pusės?



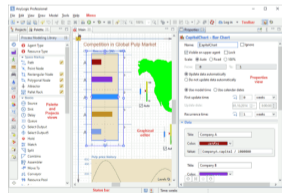
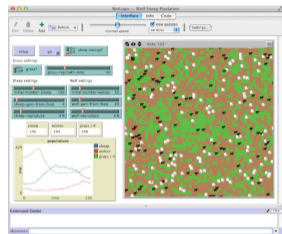
## Miško gaisro modelis:


- Miškas:  $\rho$  medžių tankis
- Gaisras: plinta tarp gretimų medžių
- Kiek išplis gaisras?

**Paveiksle:**  $\rho = 0.4, 0.5, 0.55$  ir  $0.6$ .



- NetLogo - grafiniai elementai, sava kalba (Logo)
- GAMA - GIS, sava kalba (paremta Java)
- AnyLogic - korporacinio lygio įrankis
- Agents.jl - Julia
- Mason - Java, turi GIS plėtinį
- Mesa - Python
- Repast - Java, palaiko HPC





# Protingi agentai ir lošimų teorija

# Lošimų teorija (angl. game theory)

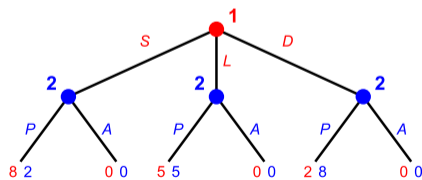
Tiria sąveikas tarp racionalių ir savanaudžių agentų.

## Lošimai:

- kooperaciniai arba konkurenciniai
- (ne)nulinės sumos
- (a)simetriniai
- (a)sinchroniniai
- baigtiniai arba begaliniai
- ...

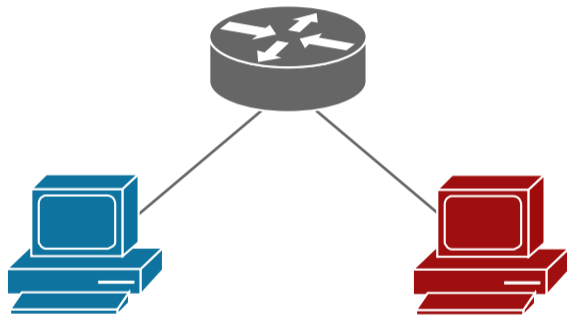
	Ak	Ži	Po
Akmuo	0, 0	1, -1	-1, 1
Žirklys	-1, 1	0, 0	1, -1
Popierius	1, -1	-1, 1	0, 0

angl. rock-paper-scissors



angl. ultimatum game

# “Grynos” (angl. pure) strategijos



	“Ba”	Ne
“Backoff”	-1, -1	-4, 0
Ne	0, -4	-3, -3

angl. TCP backoff game

- Kas yra optimalu?
- Kas yra racionalu?

Ikonos: vecta.io

# Mišrios (angl. mixed) strategijos



$m \setminus v$	Tw	Ra
Twilight	2, 1	0, 0
Rambo	0, 0	1, 2

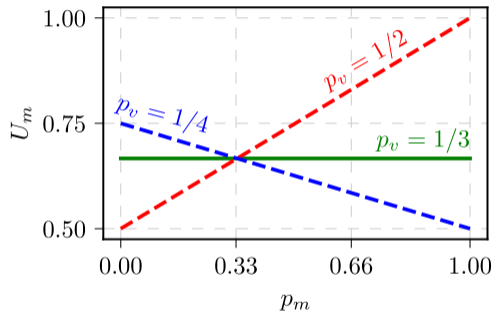
angl. battle of the sexes

Ką daryti kai vieno akivaizdaus pasirinkimo nėra?

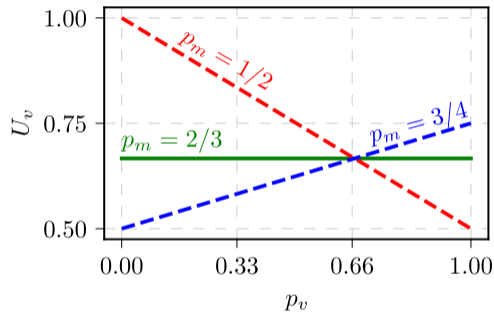
$$U_m(p_m = 1, p_v) = U_m(p_m = 0, p_v),$$

$$U_v(p_m, p_v = 1) = U_v(p_m, p_v = 0).$$

# Kas nutiks nukrypus nuo mišrios strategijos?



$$U_m(p_m, p_v) = 2p_m p_v + (1 - p_m)(1 - p_v)$$



$$U_v(p_m, p_v) = p_m p_v + 2(1 - p_m)(1 - p_v)$$

# Kai kurie lošimai neturi “grynos” strategijos

$v \setminus s$	Ka	De
Kairė	1, 0	0, 1
Dešinė	0, 1	1, 0

angl. matching pennies



Vartininkas bando atspėti į kurią pusę smūgiuos smūgiuojantis.

$$U_v(p_v, p_s) = p_v p_s + (1 - p_v)(1 - p_s), \quad U_s(p_v, p_s) = p_v(1 - p_s) + (1 - p_v)p_s$$

Paveikslas: [Wikimedia](#)

# Praktiniai klausimai treneriui



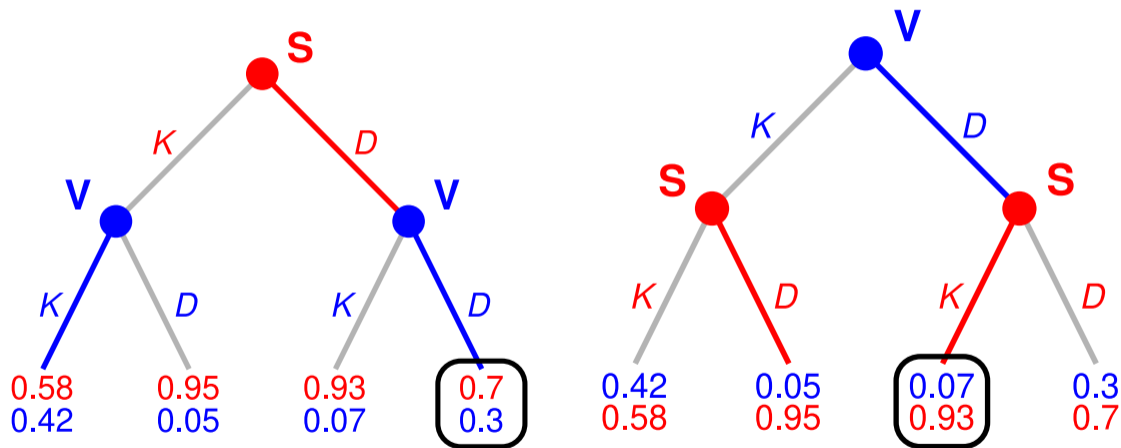
$v \setminus s$	Kairė	Dešinė
Kairė	0.42, 0.58	0.07, 0.93
Dešinė	0.05, 0.95	0.3, 0.7

- 1 Kaip elgtis vartininkui?  
(Ats.:  $p_v \approx 0.42$ )
- 2 Ką daryti smūgiuojančiam?  
(Ats.:  $p_s \approx 0.38$ )
- 3 Kokios baigčių tikimybės?  
(Ats.:  $U_v \approx 0.2$ )

Empirinis lošimas: [Palacios-Huerta (2003)]; Paveikslas: [sportingnews.com](http://sportingnews.com)



# Greitesnė reakcija



# Sudėtingesni klausimai

- Daugiau veiksmų
- Daugiau žaidėjų
- Daugiau lošimų
- Atsitiktiniai lošimai
- Alternatyvūs “racionalumai”

## **Efektyvūs lošimai:**

- Aukcionų mechanizmai
- Balsavimo mechanizmai
- ...

## **Atsparumas:**

- Klaidoms
- Piktnaudžiavimui

**Rekomendacija:** “Game Theory” kursas ([Coursera](#) ir [Youtube](#))



Turtas ir idealios dujos

# Kinetinis modelis (angl. kinetic exchange model)

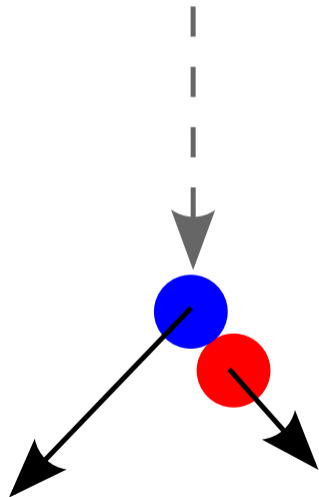
- 1 Susiduria dvi daleles  $i$  ir  $j$ .
- 2 Susidūrimo metu bus perduota  $\Delta w_{ij}$  energijos:

$$\Delta w_{ij} = r_i w_i - r_j w_j.$$

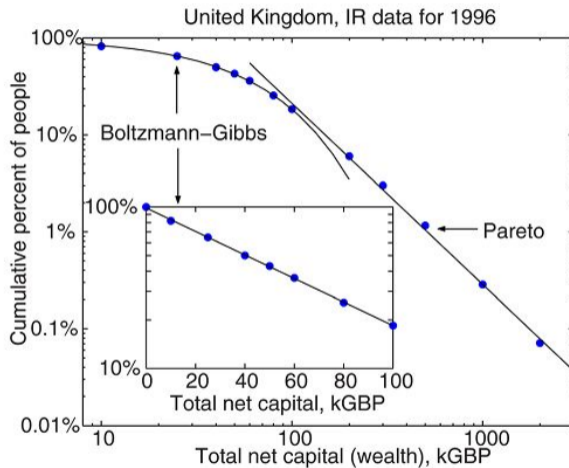
- 3 Atnaujiname energijas:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



# Empiriniai turto duomenys



# Elementarus kinetinis modelis

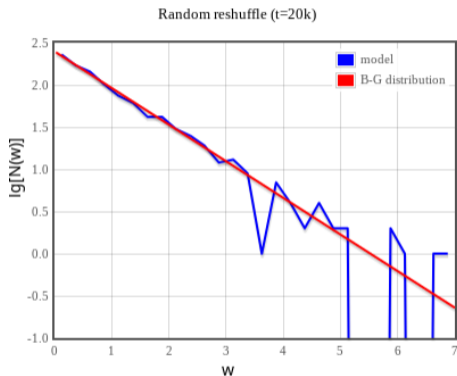
- 1 Susitinka du agentai  $i$  ir  $j$ .
- 2 Sąveikos metu perduodama  $\Delta w_{ij}$  turto:

$$\Delta w_{ij} = (1 - \varepsilon) w_i - \varepsilon w_j.$$

- 3 Atnaujiname turtus:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



Programėlė: Elementarus kinetiniai modeliai (RF)

# Elementaraus kinetinio modelio analizė

- Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\frac{\partial p(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial N^+(w, t)}{\partial t} - \frac{\partial N^-(w, t)}{\partial t}$$

- “Išeinančios” dalelės:  $\frac{\partial N^-(w, t)}{\partial t} \sim 2p(w, t)$
- “Ateinančios” dalelės:  $\frac{\partial N^+(w, t)}{\partial t} \sim 2\mathbb{P}[0 < w < w_i(t) + w_j(t)]$
- Stacionarus skirstinys:

$$\frac{\partial p_{st}(w, t)}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_{st} \sim \mathbb{P}[\dots], \quad \Rightarrow \quad p_{st}(w) = \frac{1}{\langle w \rangle} \exp\left(-\frac{w}{\langle w \rangle}\right).$$

# Santykinis taupymas

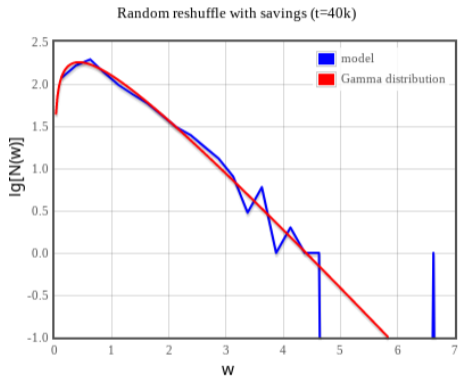
- 1 Susitinka du agentai  $i$  ir  $j$ .
- 2 Sąveikos metu perduodama  $\Delta w_{ij}$  turto:

$$\Delta w_{ij} = (1 - \kappa) [(1 - \varepsilon) w_i - \varepsilon w_j].$$

- 3 Atnaujiname turtus:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \Delta w_{ij},$$

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \Delta w_{ij}.$$



$\kappa = 0.2$

Programėlė: Turto modeliavimas kinetiniais modeliais (RF)



# Momentų analizė

Pusiausvyroje kairė ir dešinė pusė turėtų turėti tą patį skirstinį:

$$w_i(t+1) \stackrel{d}{=} \kappa w_i(t) + \varepsilon(1-\kappa)[w_i(t) + w_j(t)]$$

Taigi:

$$\langle w^m \rangle = \langle \{ \kappa w_i + \varepsilon(1-\kappa)[w_i + w_j] \}^m \rangle.$$

Spręsti turime rekurentiškai:

$$\langle w^1 \rangle = 1,$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{\kappa + 2}{1 + 2\kappa},$$

$$\langle w^3 \rangle = \frac{3(\kappa + 2)}{(1 + 2\kappa)^2},$$

$$\langle w^4 \rangle = \frac{72 + 12\kappa - 2\kappa^2 + 9\kappa^3 - \kappa^5}{(1 + 2\kappa)^2(3 + 6\kappa - \kappa^2 + 2\kappa^3)}.$$

Ganėtinai gera aproksimacija:

$$p(w) \sim w^{n-1} \exp(-nw),$$

kur  $n = 1 + \frac{3\kappa}{1-\kappa}$ .

# Laipsninio skirstinio gavimas

Yra žinoma, kad

$$\int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda x) d\lambda = \frac{1}{x^2}.$$

O kaip su santykinio taupymo modeliu?

$$p(\kappa) = ???$$

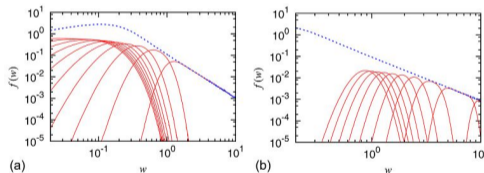
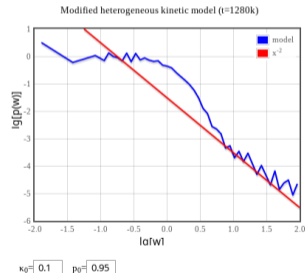


Fig. 3. (Color online) Wealth distribution  $f(w)$  for uniformly distributed  $\kappa_i$  (or  $\lambda_i$ ) in the interval  $(0,1)$ ;  $f(w)$  is decomposed into partial distributions  $f_i(w)$ , where each  $f_i(w)$  is obtained by counting the statistics of those agents with parameter  $\lambda_i$  in a specific sub-interval (from Ref. 36). The left panel shows the decomposition of  $f(w)$  into ten partial distributions in the  $\lambda$ -subintervals  $(0, 0.1)$ ,  $(0.1, 0.2)$ , ...,  $(0.9, 1)$ . The right panel decomposes the final partial distribution in the  $\lambda$ -interval  $(0.9, 1)$  into partial distributions obtained by counting the statistics of agents with  $\lambda$ -subintervals  $(0.9, 0.91)$ ,  $(0.91, 0.92)$ , ...,  $(0.99, 1)$ . Note how the power law appears as a consequence of the superposition of the partial distributions.



# Kinetiniai modeliai: turtui ir ne tik

## Turtui:

- Suderinamumas su ekonomikos teorijomis
- Gabumų / sėkmės įtaka
- Laikinė dinamika
- Skirtingi įplaukų mechanizmai



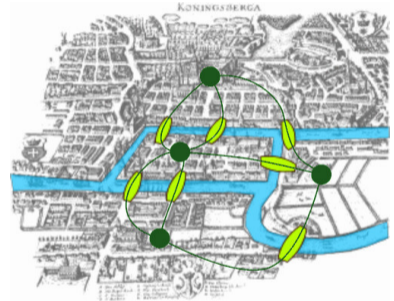
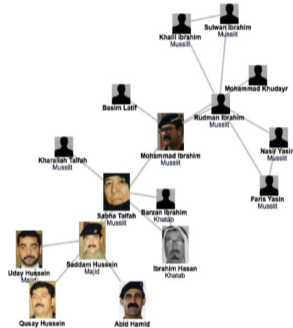
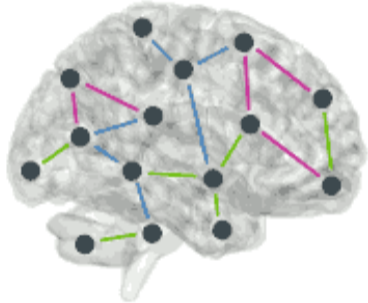
## Ne tik:

- Nuomonių dinamika (Biswas-Chatterjee-Sen modelis)
- Reitingavimo sistemos (pvz., ELO)
- Epidemiologinis modeliavimas pagal socialines kategorijas
- Alkoholio vartojimas



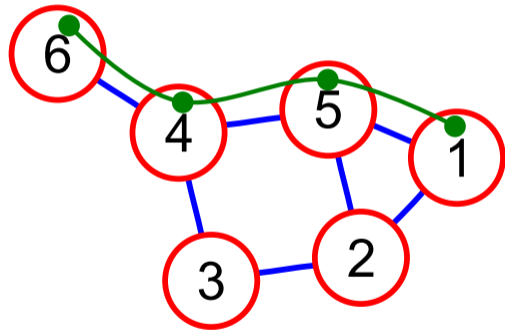
# Tinklų teorija

# Ryšiai



Paveikslai: [Lynn, Basset (2019)], slate.com, Wikimedia.

# Pagrindiniai terminai



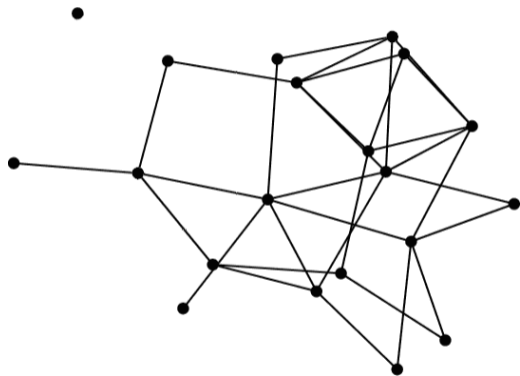
- **Tinklas** - mazgų ir jungčių rinkinys.
- Matematikams: grafai, viršūnės ir briaunos.
- **Gretimi** mazgai - sujungti jungtimi.
- Mazgo **laipsnis** - gretimų jam mazgų skaičius.
- **Kelias** - gretimų mazgų seka.
- **Geodezė** - trumpiausias kelias tarp mazgų  $i$  ir  $j$ .
- Tinklo **diametras** - ilgiausia geodezė tinkle.

# Kaimynystės matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jei  $A_{ij} \neq 0$ , tai tinkle yra  $j \rightarrow i$  jungtis.
- Mazgo laipsnis:  
 $k_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_{ij} \neq 0} = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_{ji} \neq 0}$ .
- $(\mathbf{A}^m)_{ij}$  pasako kiek yra  $m$  ilgio  $j \rightarrow i$  kelių.
- **Kilpos:**  $A_{ii} = 1$ .
- Jungtys gali turėti **kryptį:**  $A_{ij} \neq A_{ji}$ .
- Kelios (**multi**) jungtys:  $A_{ij} \in \mathbb{N}_0$ .
- Jungtys gali turėti **svorį:**  $A_{ij} \in \mathbb{R}$ .

# Erdos-Renyi (atsitiktinis) tinklas

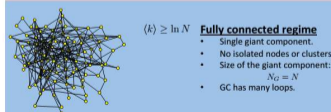
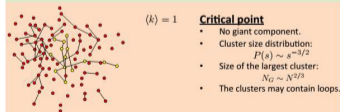
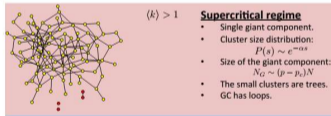
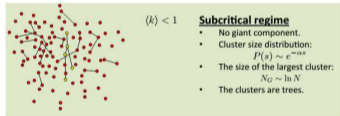
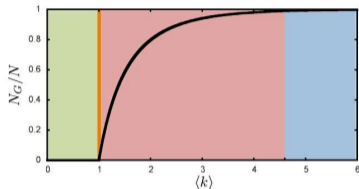


- 1 Pradèkime nuo tinklo su  $N$  mazgų ir  $L = 0$  jungčių.
  - 2 Kiekviena mazgų pora (viso  $N(N - 1) / 2$  porų) sudaro jungtį su tikimybe  $p$ .
- Tinklas turės  $\langle L \rangle = pN(N - 1) / 2$  jungčių.
  - Mazgo laipsnis:  
 $\langle k \rangle = 2L / N = p(N - 1)$ .

Programėlė: E-R modelis (RF)



# Fazinis virsmas E-R modelyje



Jeį mazgas  $i$  priklauso **didžiajai komponentei**, tai jam gretimas mazgas  $j$  irgi priklauso d.k.

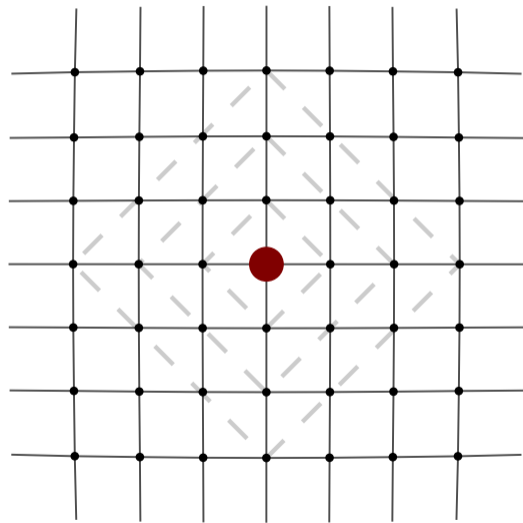
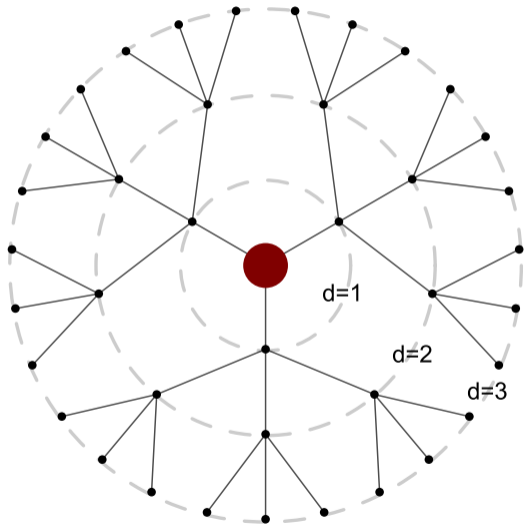
Tikimybė, kad mazgas nepriklauso d.k.:

$$u = (1 - p + pu)^{N-1},$$

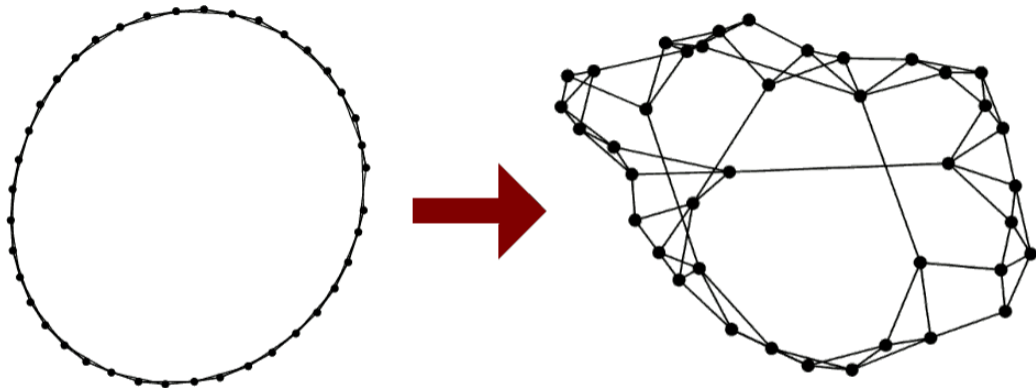
$$\frac{N_G}{N} = 1 - \exp \left[ - \langle k \rangle \frac{N_G}{N} \right].$$

Paveikslas: [networksciencebook.com](http://networksciencebook.com) (senesnis leidimas)

# E-R tinklas ir reguliari gardelė

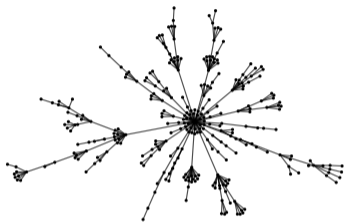


# Watts–Strogatz tinklas



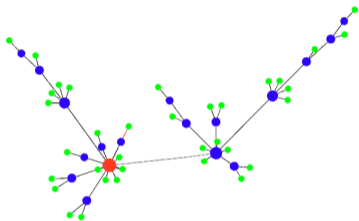
Atsitiktinės briaunos mažina diametrą nenaikindamos lokalios struktūros.

# Mastelio neturintys tinklai

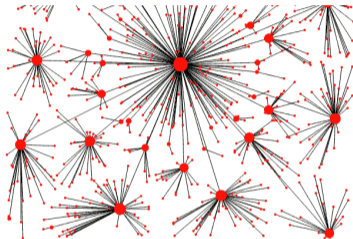


Prisijungimas:

$$p(i \rightarrow j) = \frac{k_j}{\sum_m k_m}$$



Nukreipimas:  $r$



Kaštai:  $\min_j (\delta d_{ij} + h_j)$

Programėlės: Barabasi-Albert modelis (RF), Briauņų nukreipimo modelis (RF), Sėkmės-priežasties modelis (RF)

# Laipsninis mazgo laipsnio skirstinys

B-A modeliui skirstinį galime nustatyti “kontinuumo” metodu:

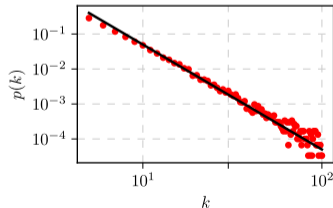
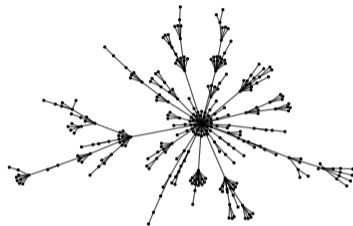
$$\frac{dk_j}{dt} = mp(i \rightarrow j, t) = m \frac{k_j}{\sum_m k_m},$$

$$\Rightarrow k_j(t) \approx m \sqrt{\frac{t}{j}}.$$

Kiek mazgų turi didesnę laipsnį nei  $k$ ?

$$N_{k_i > k} = \frac{m^2 t}{k^2}.$$

Kokia tikimybė rasti mazgą  $k_i = k$ ?



## Kas neaptarta:

- Laipsnių koreliacijos
- Klasterizacija
- Tankėjimas
- “Centriškumas” (=įtaka)
- Strateginis tinklų formavimas
- “Lošimai” ant tinklų

## Pastaruoju metu aktualu:

- Laikinė tinklų evoliucija
- Daugelio lygių tinklai
- Hyper-jungtys
- Aukšto rango tinklai
- Nuomonių dinamika tinkluose
- Bendruomenių atpažinimas
- Trūkstamų jungčių radimas
- “Nulinio” paciento radimas

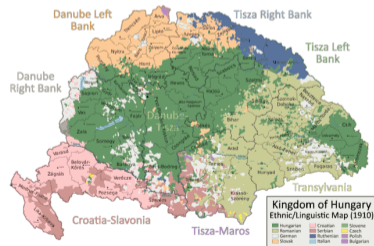
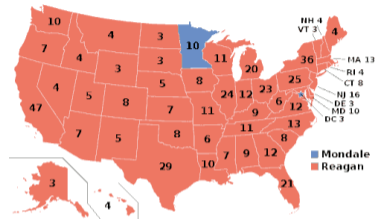
**Rekomendacija:** Barabasi “Network Science”, Jackson “Social and Economic Networks” kursas ([Coursera](#) ir [Youtube](#))



# Nuomonių dinamika

# Tematika, o ne įrankis

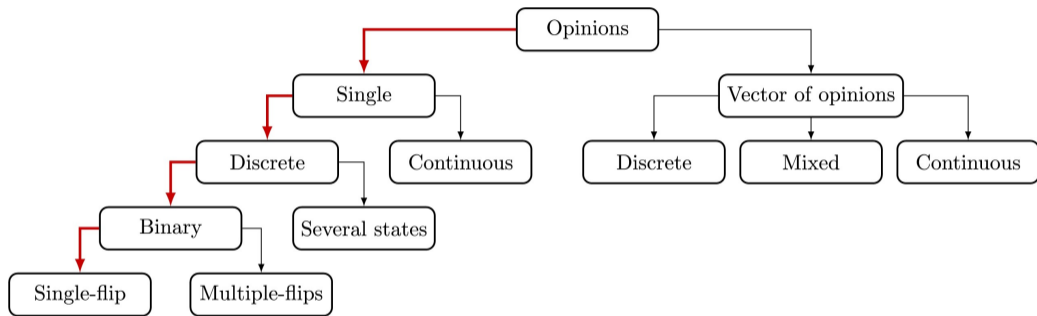
- Rinkimai ir apklausos
- Gyventojų surašymas
- Elgsena viešose erdvėse
- Laboratoriniai eksperimentai



Paveikslai: Gizmodo, Wikimedia, Wikimedia



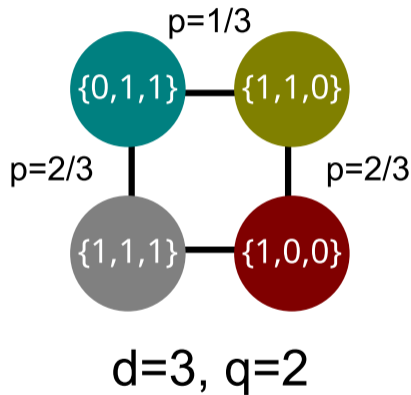
# Agentų modelių įvairovė nuomonių dinamikoje



Paveikslas: [Jedrzejewski, Weron (2019)]

# Nuomonių vektorius: Axelrod'o kultūros plitimo modelis

- Agentas –  $d$ -matis vektorius.
  - Komponentė gali įgyti  $q$  verčių.
- 1 Pasirenkame agentą  $i$ .
  - 2 Pasirenkame  $i$  kaimyną  $j$ .
  - 3  $i$  sąveikauja su  $j$  su tikimybe, kuri yra proporcinga sutampančių komponentių skaičiui.
  - 4 Sąveikos metu  $i$  nukopijuoja vieną iš  $j$  nuomonės komponentių.



Originalus darbas: [Axelrod (1997)]; Programėlė: Axelrod modelis (RF)

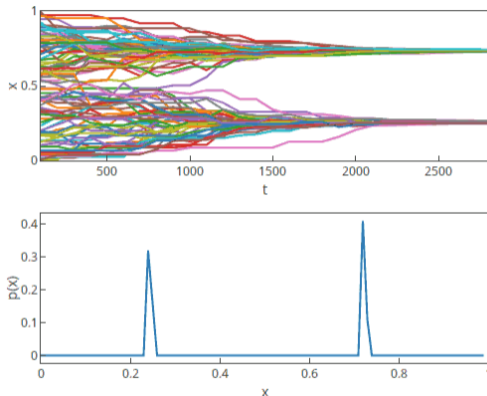
# Tolydi nuomonė: riboto pasitikėjimo modeliai

- Agentas turi tolydžią nuomonę  $x_i$ .
- Sąveika vyksta tik su panašiais, jei  $|x_j(t) - x_i(t)| < \varepsilon$ :

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + \mu [x_j(t) - x_i(t)].$$

Priešingu atveju nieko nevyksta:

$$x_i(t + 1) = x_i(t).$$

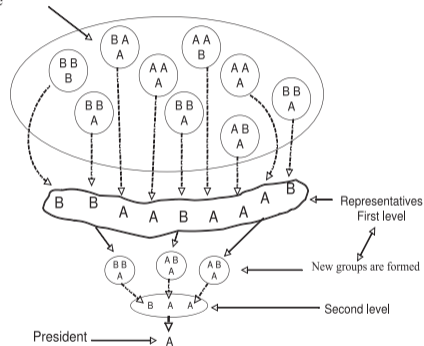


Apžvalga: [Flache *et al.*(2017)]. Programėlė: Defuant *et al.* modelis (RF)

# Diskreti nuomonė: Galam modeliai

- Diskrečios nuomonės
- Diskutuojama grupėse
- Visi perima lokalios daugumos nuomonę
- Jei daugumos nėra, tai perimama globalios mažumos nuomonė

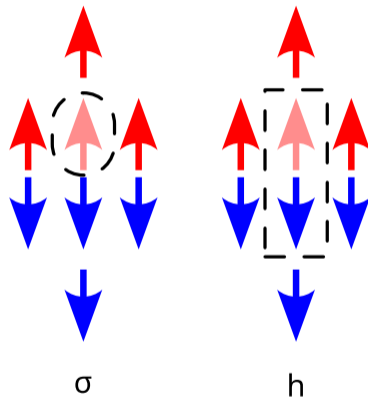
Agents are randomly selected from the population to form the ground people



Paveikslas/Apžvalga: [Galam (2008)]. Programėlė: Hierarchinio balsavimo modelis (RF)

# Rinkėjo modelis

- Diskrečios nuomonės
- Individualios sąveikos: agentai savarankiškai keičia nuomonę
- Porinės sąveikos: agentai kopijuoja kaimynus
- Sąveikos yra apibrėžtos įvairioms topologijoms (agentų tinklams)



Originalus darbas: [Clifford, Sudbury (1973)]. Apžvalgos: [Redner (2019); Jedrzejewski, Weron (2019)]. Programėlės: #voter-model (RF)

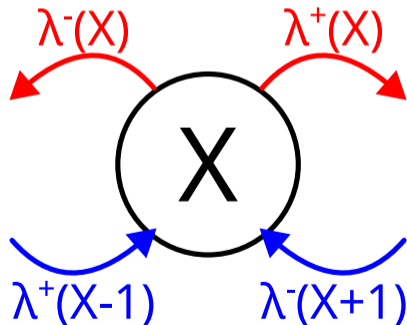
# Rinkėjo modelis – gimimo-mirties procesas

Vykstančius procesus galima apibendrintai užrašyti:

$$\lambda^+(X) = (N - X) \left[ \sigma^+ + h \frac{X}{N^\alpha} \right], \quad \lambda^-(X) = X \left[ \sigma^- + h \frac{N - X}{N^\alpha} \right].$$

Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p(X, t)}{\Delta t} = & -\lambda^+(X)p(X, t) - \lambda^-(X)p(X, t) + \\ & + \lambda^+(X-1)p(X-1, t) + \\ & + \lambda^-(X+1)p(X+1, t). \end{aligned}$$



# Termodinaminė ( $N \rightarrow \infty$ ) riba

Perrašome spartas:

$$\lambda_s^+(x) = N^2 \cdot (1-x) \left[ \frac{\varepsilon^+}{N} + \frac{x}{N^\alpha} \right], \quad \lambda_s^-(x) = N^2 \cdot x \left[ \frac{\varepsilon^-}{N} + \frac{1-x}{N^\alpha} \right].$$

Pagrindinė kinetinė lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p(x, t_s)}{\Delta t_s} &= -\lambda_s^+(x)p(x, t_s) - \lambda_s^-(x)p(x, t_s) \\ &\quad + \lambda_s^+(x - \Delta x)p(x - \Delta x, t_s) + \lambda_s^-(x + \Delta x)p(x + \Delta x, t_s) = \\ &= (\mathbf{E}^+ - 1) [\lambda_s^-(x)p(x, t_s)] + (\mathbf{E}^- - 1) [\lambda_s^+(x)p(x, t_s)]. \end{aligned}$$

Čia  $\mathbf{E}^\pm f(x) = f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}((\Delta x)^3)$ .

# Fokero-Planko lygtis

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, t_s)}{\partial t_s} &\approx -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda_s^+(x) - \lambda_s^-(x)) p(x, t_s)] + \frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\lambda_s^+(x) + \lambda_s^-(x)) p(x, t_s)] \approx \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial x} [\{\varepsilon^+ (1-x) - \varepsilon^- x\} p(x, t_s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{2x(1-x)}{N^\alpha} p(x, t_s) \right]\end{aligned}$$

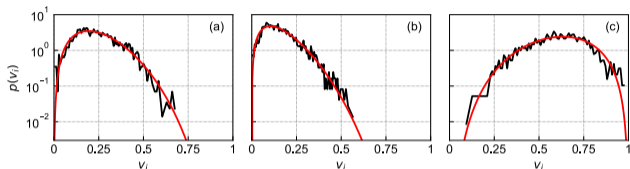
Stacionarus ( $t \rightarrow \infty$ ) skirstinys  $\alpha = 0$  atveju:

$$0 = -\{\varepsilon^+ (1-x) - \varepsilon^- x\} p_{st}(x) + \frac{d}{dx} [x(1-x) p_{st}(x)] \quad \Rightarrow$$

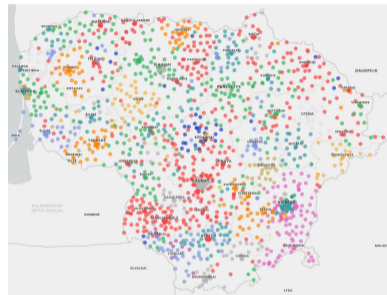
$$p_{st}(x) = C_N \cdot x^{\varepsilon^+ - 1} (1-x)^{\varepsilon^- - 1}.$$



# Beta skirstinys tinka empiriniams duomenims!



SK, LKDP ir LDDP balsų dalis 1992 m. Seimo rinkimų apylinkėse.



2022 m. savivaldybių rinkimų rezultatai apylinkėse.

## PHYSICAL REVIEW LETTERS

Highlights Recent Accepted Collections Authors Referees Search Press About

Featured in Physics

Editors' Suggestion

### Is the Voter Model a Model for Voters?

Juan Fernández-Gracia, Krzysztof Suchecki, José J. Ramasco, Maxi San Miguel, and Victor M. Eguiluz  
Phys. Rev. Lett. **112**, 158701 – Published 18 April 2014; Erratum Phys. Rev. Lett. **113**, 089903 (2014)

Paveikslai: [Kononovicius (2018)], maps.lt. Straipsnis: [Fernandez-Gracia et al.(2014)].

# Kas toliau?

- $q$ -Rinkėjo modelis
- Daugelio būsenų modelis
- Analizinės aproksimacijos
- Ne-Markovo mechanizmai
- Socialinių tinklų įtaka
- Socialinių mokslų teorijos



# Ačiū už dėmesį!

✉ [aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt](mailto:aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt)

🔗 [kononovicius.lt](http://kononovicius.lt), [rf.mokslasplius.lt](http://rf.mokslasplius.lt)



**Faculty of  
Physics**

